

Sächsisches Landesseminar Mathematik 2019

Klausuraufgaben Klassenstufe 9 / 10

Sayda, 28. 03. 2019

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann ausserdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

Aufgabe 1:

(6 Punkte)

Bestimmen Sie zehn nicht notwendigerweise verschiedene ganze Zahlen mit folgender Eigenschaft und beweisen Sie die Einzigkeit Ihrer Lösung (bis auf die Reihenfolge der Zahlen):

Läßt man eine von den zehn Zahlen weg und addiert die restlichen neun Zahlen, so ist das Ergebnis stets eine der Zahlen 82, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 91, 92, und jede dieser Zahlen kommt mindestens einmal als eine solche Summe vor.

Aufgabe 2:

(7 Punkte)

In einem Dreieck $\triangle ABC$ schneide die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BCA$ den Umkreis neben dem Punkt C noch im Punkt D und die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle CAB$ den Umkreis neben dem Punkt A noch im Punkt E . Die Gerade DE schneide die Seite AB des Dreiecks im Punkt F und die Seite BC im Punkt G . Es sei weiterhin I der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden in $\triangle ABC$.

Beweisen Sie, dass $FBGI$ ein Rhombus ist.

Aufgabe 3:

(7 Punkte)

Seien u, v, w positive reelle Zahlen mit $u + v + w = 1$. Weiter sei a eine reelle Zahl mit $0 \leq a \leq 1$.

Beweisen Sie die Ungleichung

$$\left(\frac{1}{u} - a\right) \left(\frac{1}{v} - a\right) \left(\frac{1}{w} - a\right) \geq (3 - a)^3.$$