Sächsisches Landesseminar Mathematik 2018
Klausuraufgaben Klassenstufe 9 / 10
Sayda, 15.03.2018

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann ausserdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Seien α und β die Lösungen der Gleichung $x^2+px+1=0$, und seien γ und δ die Lösungen der Gleichung $x^2+qx+1=0$, wobei $p, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ vorausgesetzt wird.

Beweisen Sie

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta) = q^2 - p^2.$$

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Auf einem rechteckigen Spielbrett der Breite n und Länge m mit $n \cdot m$ quadratischen Feldern spielen zwei Spieler A und B ein Spiel, indem sie abwechselnd ein und dieselbe Spielfigur von einem Feld auf eines der Nachbarfelder setzen, d.h. eines der Felder, das mit dem Feld der aktuellen Position der Figur eine gemeinsame Seite hat. Dabei darf kein Feld zweimal durch die Spielfigur benutzt werden. Der Spieler A beginnt; wer keinen gültigen Spielzug mehr ausführen kann, hat verloren.

(a) Die Spielfigur stehe zu Beginn im linken unteren Eckfeld des Spielbretts.

Entscheiden Sie in Abhängigkeit von n und m, welcher der Spieler eine Gewinnstrategie hat, d.h. welcher Spieler bei intelligenter Spielweise den Sieg erzwingen kann.

(b) Die Spielfigur stehe zu Beginn im Feld unmittelbar rechts neben dem linken unteren Eckfeld.

Beantworten Sie erneut die Frage nach der Existenz einer Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck und W der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von Winkel $\sphericalangle ACB$ und der Seite $\overline{AB}$. Weiter seien I_A und I_B die Inkreismittelpunkte der Dreiecke $\triangle AWC$ bzw. $\triangle WBC$. Die Geraden I_AW und I_BB schneiden sich im Punkt D. Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DI_B}$.

Zeigen Sie, dass $MWBC$ ein Sehnenviereck ist.