Sächsisches Landesseminar Mathematik 2015
Klausuraufgaben Klassenstufe 11 / 12
Sayda, 19.03.2015

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann ausserdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

Aufgabe 1: (6 Punkte) Man löse das folgende Gleichungssystem über dem Bereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$!

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ \sqrt{x}+\sqrt{xy}+\sqrt{xyz} &= 1+2\sqrt[3]{xyz} \\ (1+x)(1+y)(1+z) &= (1+\sqrt[3]{xyz})^3 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (7 Punkte) Es seien mit a, b und c die Seitenlängen eines beliebigen ebenen Dreiecks bezeichnet. Man beweise, dass dann stets die folgende Ungleichung gilt:

$$2-\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) > \frac{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

Aufgabe 3: (7 Punkte) Zeige, dass für jede positive ganze Zahl n gilt:
7 ist ein Teiler von 3^n+n^3 genau dann, wenn 7 ein Teiler von $3^n \cdot n^3+1$ ist.