Sächsisches Landesseminar Mathematik 2014
Klausuraufgaben Klassenstufe 11 / 12
Sayda, 13.03.2014

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

1. Man löse die folgende Gleichung über dem Bereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$!

$$\sqrt[3]{x^2+2x+2}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+2}$$

(6 Punkte)

2. (a) Untersuche, ob es 2013 positive ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{2013}$ gibt, von denen keine eine weitere teilt und sodass für jedes $i \in \{1, \ldots, 2012\}$ die Zahl $(a_i)^i$ ein Teiler der Zahl $(a_{i+1})^{i+1}$ ist.

   (b) Es sei $b_1, b_2, b_3, \ldots$ eine Folge positiver ganzer Zahlen, sodass für jede positive ganze Zahl k die Gleichung $b_k = b_{k+2013}$ gilt und die Zahl $(b_i)^i$ ein Teiler der Zahl $(b_{i+1})^{i+1}$ ist.
   Zeige, dass dann die Folge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ eine konstante Folge ist.

(7 Punkte)

3. Man beweise, dass für beliebige Dreiecke mit den üblichen Bezeichnungen die folgende Ungleichung gilt:

$$4\big(\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma)\big)^3 \geq 27\big(\sin(2\alpha)+\sin(2\beta)+\sin(2\gamma)\big)$$

(7 Punkte)