Sächsisches Landesseminar Mathematik 2014

Klausuraufgaben Klassenstufe 9/10

Sayda, 13. März 2014

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

Aufgabe 1.

Es sei n eine natürliche Zahl. Man zeige, dass es genauso viele Darstellungen von n als Summe von lauter ungeraden positiven ganzen Zahlen gibt wie Darstellungen von n als Summe paarweise verschiedener positiver ganzer Zahlen.

Hinweis: Zwei Summendarstellungen werden dabei als gleich angesehen, wenn sie sich nur in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden.

Aufgabe 2.

Gegeben seien ein gleichseitiges Dreieck ABC und ein Punkt D auf der Strecke AC, sodass $\left|\overline{AD}\right| = \frac{1}{3}\left|\overline{AC}\right|$, und ein Punkt E auf der Strecke BC, sodass $\left|\overline{CE}\right| = \frac{1}{3}\left|\overline{BC}\right|$. F sei der Schnittpunkt von AE und BD.

Man zeige, dass der Winkel $\angle BFC$ ein rechter ist.

Aufgabe 3.

Es seien a und b nichtnegative reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}\ .$$

Wann gilt die Gleichheit?