Sächsisches Landesseminar Mathematik 2013
Klausuraufgaben Klassenstufe 8
Sayda, 21. 03. 2013

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

1. Zeige, dass man aus $n+1$ paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen, die kleiner als $2n$ sind, immer drei solche Zahlen auswählen kann, dass die Summe von zweien gleich der dritten ist.

   (*4 Punkte*)

2. Bestimme alle Paare $(x;y)$ positiver ganzer Zahlen für die

   $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{14}$$

   gilt.

   (*5 Punkte*)

3. Es sei n eine positive ganze Zahl. Auf einem Tisch liegen n Münzen in einer Reihe nebeneinander, von denen jede entweder Kopf oder Zahl zeigt. Ein Schritt besteht nun darin, genau eine dieser Münzen umzudrehen (d.h. sie zeigt dann Zahl, wenn sie vorher Kopf gezeigt hat und umgekehrt). Für welche Werte für n ist es möglich, genau 2^n solcher Schritte nacheinander auszuführen, sodass die Münzen am Ende wieder genauso gedreht sind wie zu Beginn, und sodass jede mögliche Kopf-Zahl-Anordnung der Münzen dabei mindestens einmal aufgetreten ist?

   (*5 Punkte*)

4. Es sei $ABCD$ ein Quadrat der Seitenlänge a. Die Punkte E und F sind derart auf der Strecke $\overline{BC}$ gelegen, dass die Strecken $\overline{BE}$, $\overline{EF}$ und $\overline{FC}$ gleich lang sind.

   Der Schnittpunkt der Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{ED}$ heißt G.

   (a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks EFG in Abhängigkeit von a.

   (b) Untersuche, ob das Dreieck EFG gleichseitig ist. (Messen ist kein Beweis!)

   (*6 Punkte*)