

# Sächsisches Landesseminar Mathematik 2012

## Klausuraufgaben Klassenstufe 11 / 12

Sayda, 15.03.2012

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

**Aufgabe 1:** Lösen Sie das folgende Gleichungssystem über der Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ !

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 50 \quad (1)$$

$$x^2 - y^2 + z^2 - t^2 = -24 \quad (2)$$

$$xy = zt \quad (3)$$

$$x - y + z - t = 0 \quad (4)$$

(6 Punkte)

**Aufgabe 2:** Es sei  $G$  der Schwerpunkt und  $R$  der Umkreisradius eines beliebigen ebenen Dreiecks  $\triangle ABC$ . Die Verlängerungen von  $GA$ ,  $GB$ , und  $GC$  schneiden den Umkreis des Dreiecks in  $D$ ,  $E$  und  $F$  (in dieser Reihenfolge).

Beweisen Sie, dass dann die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{3}{R} \leq \frac{1}{|GD|} + \frac{1}{|GE|} + \frac{1}{|GF|} \leq \sqrt{3} \cdot \left( \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|BC|} + \frac{1}{|CA|} \right)$$

(7 Punkte)

**Aufgabe 3:** Beweisen Sie, dass für jede positive natürliche Zahl  $n$  eine positive ganze Zahl  $k$  so existiert, dass  $s^n | 19^k - 97$  gilt.

(7 Punkte)