Sächsisches Landesseminar Mathematik 2012

Klausuraufgaben Klassenstufe 9/10

Sayda, 15. März 2012

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

Aufgabe 1.

Gegeben sind zwei Kreisscheiben unterschiedlicher Größe, die jeweils in 2012 gleich große Sektoren unterteilt sind. Auf jeder Scheibe werden nun 1006 der 2012 Sektoren weiß und die anderen 1006 Sektoren schwarz gefärbt.

Man finde die größte ganze Zahl n mit der folgenden Eigenschaft: Es ist in jedem Fall möglich, die kleinere Kreisscheibe so auf die größere zu legen, dass ihre Mittelpunkte übereinanderliegen und auch die Sektorengrenzen übereinstimmen und in mindestens n der 2012 Sektoren die kleine und die große Scheibe die gleiche Farbe haben.

Aufgabe 2.

Man löse das folgende Gleichungssystem über der Menge der reellen Zahlen:

(1) $x^3 + y^3 + z^3 = 3 \cdot xyz$

(2) $z^2 = 2 \cdot (3x + xy + 5y) - 34$

Aufgabe 3.

a) Man beweise, dass jedes Dreieck in 144 kongruente Dreiecke unterteilt werden kann.
b) Man beweise, dass es ein Dreieck gibt, welches in 145 kongruente Dreiecke unterteilt werden kann.