

Sächsisches Landesseminar Mathematik 2011

Klausuraufgaben Klassenstufe 9/10

Sayda, 17. März 2011

Aufgabe 1

Man betrachte einen See mit zwei Inseln darin und sieben Städten am Ufer. Die Inseln und Städte nennen wir im Folgenden kurz Orte. Zwischen genau den folgenden Paaren von Orten besteht eine Schiffsverbindung:

- (i) zwischen den beiden Inseln,
- (ii) zwischen jeder Stadt und jeder Insel,
- (iii) zwischen zwei Städten genau dann, wenn sie nicht benachbart sind (d.h. zwischen diesen zwei Städten liegt auf einem Verbindungsweg entlang des Ufers mindestens eine weitere Stadt).

Jede dieser Verbindungen wird von genau einem von zwei konkurrierenden Schiffsunternehmen angeboten.

Man beweise, dass es stets drei Orte gibt, sodass es zwischen je zwei dieser Orte Schiffsverbindungen desselben Unternehmens existieren.

Aufgabe 2

Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man zeige die Ungleichung

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Aufgabe 3

Man betrachte vierseitige Pyramiden mit der (konvexen) Grundfläche $ABCD$ und der Spitze S . Alle Kanten bis auf die Mantelkante \overline{AS} haben die Länge 1.

Man bestimme die Länge der Mantelkante \overline{AS} so, dass das Volumen der Pyramide maximal wird.