Sächsisches Landesseminar Mathematik 2010
Klausuraufgaben Klassenstufe 11 / 12
Sayda, 25.03.2010

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Gegeben ist ein Kreis k und ein Punkt A außerhalb dieses Kreises. Die Tangenten von A an k berühren den Kreis in den Punkten B und C

X sei ein Punkt auf der Strecke $\overline{AB}$, Y sei ein Punkt auf der Strecke $\overline{AC}$, so dass XY den Kreis k berührt.

Wir bezeichnen $a = |AB| = |AC|$, $x = |XB|$, $y = |YC|$.

Untersuchen Sie, für welche Winkelgrößen $\alpha = |\measuredangle BAC|$ das Verhältnis

$$V = \frac{a-x}{a+x} + \frac{a-y}{a+y} \tag{1.1}$$

von der Lage der Punkt X, Y unabhängig ist, und ermitteln Sie dieses Verhältnis.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Beweisen Sie, dass für jedes Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c und den Längen der Höhen h_a, h_b, h_c in der üblichen Bezeichnung die folgende Ungleichung gilt:

$$3\left(\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c}\right) \geq 4\left(\frac{h_a}{a} + \frac{h_b}{b} + \frac{h_c}{c}\right). \tag{2.1}$$

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Gegeben ist die Zahlenfolge $e = 010201030\ldots$, in der auf der Position n gerade der Exponent $e(n)$ der größten Zweierpotenz steht, die n teilt. So gilt zum Beispiel $e(24) = 3$, da 24 durch 2^3, nicht aber durch 2^4 teilbar ist. Die Zählung der Position beginnt mit 1.

Zeigen Sie, dass e kein Quadrat enthält.

<u>Hinweis:</u> e enthält ein Quadrat der Länge $d > 0$ ab Position p, wenn $e(k) = e(k+d)$ für alle $k \in \{p, p+1, \ldots, p+d-1\}$ gilt.