Sächsisches Landesseminar Mathematik
Grünheide – 25. 03. 2010
Klausur Klasse 8

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

1. Auf einer Insel sammeln 3 Männer mit einem Esel Kokusnüsse die sie gerecht untereinander aufteilen wollen. Am Abend gehen sie schlafen. In der Nacht erwacht der erste Mann und beschließt, sich seinen Anteil zu nehmen. Er teilt den Haufen der gesammelten Kokusnüsse in 3 gleiche Teile; dabei bleibt genau eine Kokusnuss übrig. Diese gibt er dem Esel, verbirgt seinen Anteil und schläft dann weiter. Später erwacht der zweite Mann, auch dieser teilt den Haufen, den er vorfindet, in drei gleich große Teile, wobei wieder genau eine Kokusnuss übrig bleibt, die er dem Esel gibt. Schließlich erwacht auch der dritte Mann und verfährt genau so, wie die zwei anderen Männer.

   Ermittle die kleinstmögliche ursprüngliche Anzahl der Kokusnüsse. (*4 Punkte*)

2. Ermittle alle dreistelligen Zahlen z, die folgende Eigenschaften haben:

   (1) Die Zahl z ist durch 9 und durch 11 teilbar.

   (2) Vertauscht man die erste und die letzte Ziffer von z, so erhält man $\frac{2}{9}$ von z.

   (*5 Punkte*)

3. Seien ABC ein spitzwinkliges Dreieck und D, E, F die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ bzw. $\overline{AB}$. Die Umkreise der Dreiecke AFE und BDF schneiden sich außer im Punkt F in einem zweiten Punkt, den wir mit P bezeichnen.

   Zeige, dass die Gerade durch P und den Höhenschnittpunkt des Dreiecks CED die Strecke $\overline{DE}$ halbiert. (*5 Punkte*)

4. An der Tafel stehen $n \geq 2$ paarweise verschiedene positive ganze Zahlen, sodass das Produkt je zweier dieser Zahlen eine Quadratzahl ist. Das Produkt aller Zahlen an der Tafel ist jedoch keine Quadratzahl.

   (a) Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 2$, für die dies möglich ist.

   (b) Zeige, dass der größte gemeinsame Teiler all dieser Zahlen an der Tafel größer als 1 ist.

   (*6 Punkte*)